APELLIDOS: NOMBRE:

CÁLCULO - Parcial I (5/4/2013)

Puntuación 40 % + 10 %

1. (10 puntos) Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+3}\right)^{4n+1} \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n^2+1}+\frac{n}{2n^2+2}+\ldots+\frac{n}{2n^2+n}\right)$$

Solución

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+3}\right)^{4n+1} \underset{1^\infty}{=} \lim_{n\to+\infty} e^{(4n+1)\left(\frac{2n^2+n}{2n^2+3}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{4n^2-11n-3}{2n^2+3}\right)} = e^2.$

b) Sea $\displaystyle b_n = \frac{n}{2n^2+1}+\frac{n}{2n^2+2}+\ldots+\frac{n}{2n^2+n}$ la sucesión dada.

Se consideran las sucesiones

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+n} \qquad \text{y} \qquad c_n = \frac{n^2}{2n^2+1},$$

que verifican $a_n \le b_n \le c_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, siendo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{2}$.

Aplicando la regla del sandwich para sucesiones, se tiene que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

2. (10 puntos) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ y, en caso afirmativo, calcular su límite:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}, \; n \ge 1 \end{cases}$$

Solución Los primeros términos de la sucesión son $\{10, 4, \sqrt{10}, \ldots\}$.

a) La sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente: Utilizando el principio de inducción,

- Si $n=1$, se verifica que $a_1 \ge a_2$ puesto que $a_1 = 10 \ge 4 = a_2$.
- Supuesta cierta la desigualdad para n, $a_n \ge a_{n+1}$, se prueba que es cierta para $n+1$, esto es, $a_{n+1} \ge a_{n+2}$:

$$a_n \ge a_{n+1} \;\Rightarrow\; a_n + 6 \ge a_{n+1}+6 \;\Rightarrow\; \sqrt{a_n+6} \ge \sqrt{a_{n+1}+6} \;\Rightarrow\; a_{n+1} \ge a_{n+2}.$$

Luego se cumple que $a_n \ge a_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

b) Si existiera el límite de la sucesión $\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = L$. Tomando límite en la expresión que define la sucesión, resulta

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n+6} \implies L = \sqrt{L+6}.$$

Resolviendo $L = \sqrt{L+6}$ se obtiene como única solución $L = 3$.

c) La sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente por 3 : Utilizando el principio de inducción,

- Si $n = 1$, se verifica que $a_1 \geq 3$ puesto que $a_1 = 10 \geq 3$.
- Supuesta cierta la desigualdad para n, $a_n \geq 3$, se prueba que es cierta para $n+1$, esto es, $a_{n+1} \geq 3$:

$$a_n \geq 3 \Rightarrow a_n + 6 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{a_n+6} \geq 3 \Rightarrow a_{n+1} \geq 3.$$

Luego se cumple que $a_n \geq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el estudio previo, se tiene que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente y está acotada inferiormente. Por tanto, la sucesión es convergente y, teniendo en cuenta el apartado *b*), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$.

3. *a*) (5 puntos) Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n}+5^n}$.

Solución Serie de términos positivos, con término general $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n}+5^n}$.

Se considera $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$, serie convergente por ser serie geométrica de razón $r = \frac{1}{5}$, con $|r| < 1$. Aplicando el criterio de comparación en el límite,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\frac{\sqrt{n}}{5^n}+1} \underset{(1)}{=} 1,$$

donde (1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n} = 0$ por ser $\sqrt{n} \ll 5^n$. Por tanto, la serie dada es convergente.

b) (5 puntos) Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!(-4)^n}$.

Solución Sea $a_n = \dfrac{n^n}{n!(-4)^n}$. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente por el criterio generalizado del cociente pues $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right) = \dfrac{e}{4} < 1$.

Entonces, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y, por tanto, converge.

4. Dada la serie de potencias $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n(n^2+3n)}(x-2)^n$, se pide:

   a) (7 puntos) Determinar el radio y el campo de convergencia de la serie de potencias.

   Solución Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, donde $a_n = \dfrac{1}{2^n(n^2+3n)}$ y $x_0 = 2$.

   Se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n}{2(n^2+5n+4)} = \dfrac{1}{2}$, luego el radio de convergencia de la serie de potencias es $r = 2$. Por tanto, la serie converge absolutamente en $(0,4)$ y no converge en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$.

   Si $x = 4$ se obtiene la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3n}$. Esta serie es convergente por el criterio de comparación en el límite utilizando la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, que es convergente por ser armónica generalizada con $p = 2 > 1$.

   Si $x = 0$ resulta la serie numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+3n}$. Utilizando el estudio realizado para $x = 4$, se observa que esta serie es absolutamente convergente, luego converge.

   Por tanto, el campo de convergencia de la serie de potencias es $[0, 4]$.

   b) (3 puntos) Calcular, si es posible, la suma de la serie para $x = 4$.

   Si $x = 4$, se tiene la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3n}$. Para calcular su suma, se obtiene la expresión de la suma parcial n-ésima S_n y se calcula su límite:

$$
\begin{aligned}
S_n =& \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1/3}{k} + \frac{-1/3}{k+3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3} \\
=& \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
-& \frac{1}{3}\left(\qquad\qquad \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \\
=& \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{11}{18}
\end{aligned}
$$

   Por tanto, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3n} = \dfrac{11}{18}$.

5. Dadas las funciones $f(x,y) = \ln(y - x^2 - 1)$ y $g(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2 + 2y}$, se pide:

   a) Representar gráficamente:

   i) (2.5 puntos) Dominio de f.

   ii) (2.5 puntos) Dominio de g.

   iii) (2.5 puntos) Dominio de la función $h(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$.

   Solución

   i) $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y - x^2 - 1 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^2 + 1\}$.

   ii) $\text{Dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3 - x^2 - y^2 + 2y \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

   iii) $\text{Dom}(h) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x^2 + 1, \ x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

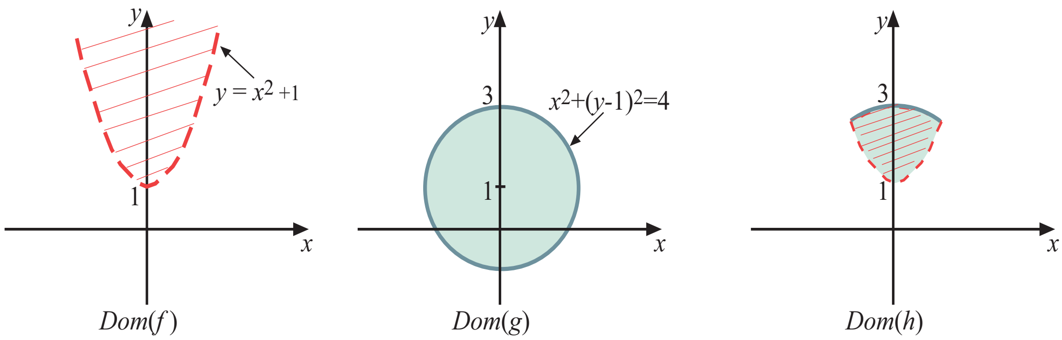

Figura 1: Representación gráfica de $\mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Dom}(g)$ y $\mathrm{Dom}(h)$

b) (2.5 puntos) Para cada uno de los dominios obtenidos en *a*), estudiar si son conjuntos abiertos, cerrados y compactos.

Solución El conjunto $\mathrm{Dom}(f)$ es abierto porque todos sus puntos son interiores. Por tanto, no es cerrado y, en consecuencia, no es compacto.

El conjunto $\mathrm{Dom}(g)$ es cerrado porque su conjunto frontera,

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Dom}(g)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + (y-1)^2 = 4\right\},$$

verifica $\mathrm{Fr}(\mathrm{Dom}(g)) \subset \mathrm{Dom}(g)$. Por tanto, no es abierto. El conjunto $\mathrm{Dom}(g)$ es acotado pues $\mathrm{Dom}(g) \subset B((0,1),r)$, siendo $r > 2$. Se tiene entonces que $\mathrm{Dom}(g)$ es compacto por ser cerrado y acotado.

El conjunto $\mathrm{Dom}(h)$ no es abierto porque no todos sus puntos son interiores, por ejemplo, (0,3) no es punto interior de $\mathrm{Dom}(h)$. El conjunto $\mathrm{Dom}(h)$ no es cerrado ya que, por ejemplo, $(0,1)$ es punto frontera de $\mathrm{Dom}(h)$ y $(0,1) \notin \mathrm{Dom}(h)$. En consecuencia, $\mathrm{Dom}(h)$ no es compacto.